Mathématiques financières

TD 4 Les amortissements (corrigé)

Exercice 1.

La société N est côté en bourse. Elle verse annuellement à ces actionnaires un dividende de 60 € et pense le faire encore longtemps. La valeur d'une action peut être évalué en actualisant les flux futures que sa détention permet d'obtenir. Le taux d'actualisation ici est de 12%.

a. Si l'on suppose que l'action peut être revendue à 700 € dans les 5 ans, quelle est la valeur aujourd'hui de l'action?

b. En fait, on peut également envisager de conserver cette action indéfiniment. Quelle est, dans ce cas, la valeur de l'action?

c. En réalité, le dividende versé augmentera de 3% par an. Quelle est, dans ce cas, la valeur de l'action?

Correction:

a. La valeur de l'action correspond à la somme de la valeur des flux que sa détention permet d'obtenir actualisés.

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{div}{(1+r)^i} + \frac{P_n}{(1+r)^n}$$

$$P = \sum_{i=1}^{5} \frac{60}{(1+0,12)^i} + \frac{700}{(1+0,12)^5}$$

$$P = 60.\frac{1-(1+0,12)^{-5}}{0,12} + 397,1988$$

$$P = 216,2866 + 397,1988 = 613,4854 \approx 613,49$$

Le prix (valeur) de l'action est de 613,49 € .

b. Le prix est alors la valeur actuelle d'une perpétuité dont le flux est 60.

$$P = \frac{Div}{r} = \frac{60}{0,12} = 500$$

Si l'action verse 60 € tout les ans jusqu'à l'infini, compte tenu du taux d'actualisation sa valeur est de 500 €.

c. Il s'agit ici de déterminer la valeur actuelle d'une perpétuité croissante. C'est ce que propose Gordon et Shapiro dans leur article de 1958.

$$P = \frac{Div}{r-g} = \frac{60}{0,12-0,03} = 666,6667 \approx 666,67$$

La valeur de l'action est dans ce cas de 666,67 €.

Exercice 2.

Un individu emprunte 80 000 € pour cinq ans au taux de 5%, remboursable en 5 annuités constantes.

a. Calculez la valeur de ces annuités.

b. Déterminez le coût global du crédit.

c. Quelle somme devrait-on rembourser à la troisième échéance si le contrat était interrompu à cette date?

d. Quel est le montant du capital remboursé après le versement de la troisième échéance?

e. Quelle est la part des intérêts contenus dans la quatrième annuité?

Correction:

a. Nous disposant de la valeur actuelle de la série d'annuités (80 000 €). On en déduit le montant de l'annuité constante.

$$v_a = a.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$80000 = a.\frac{1-(1+0,05)^{-5}}{0,05} = a.\frac{1-0,7835262}{0,05} = a.\frac{0,2164738}{0,05} = 4,329476.a$$

$$a = \frac{80000}{4,329476} = 18477,99$$

L'annuité est de 18 477,99 €.

b. Il s'agit ici de calculer le montant total des intérêts payés.

$$I = v_f - v_a = n.a$$

$$I = 5 \times 18477,99 - 80000 = 92389,95 - 80000 = 12389,95$$

L'intérêt payé au total est de 12 389,95 €.

c. La somme à payer pour rembourser le crédit à la troisième échéance correspond à la valeur actuelle des annuités restantes.

$$remb = an_3 + v_a(an_4) + v_a(an_5) = 18477,99 + \frac{18477,99}{1+0,05} + \frac{18477,99}{(1+0,05)^2}$$

$$remb = 18477,88 + 34358,17 = 52836,16$$

Il devra rembourser 52 836,16 €.

d. Pour répondre à la question, commençons par établir le tableau d'amortissement de l'emprunt.

Année	Capital restant dû	Annuité	Intérêt	Remboursement
1	80 000	18 477,88	4 000	14 477,88
2	65 522,12	18 477,88	3 276,11	15 201,77
3	50 320,35	18 477,88	2 516,02	15 961,86
4	34 358,49	18 477,88	1 717,93	16 759,95
5	17 598,54	18 477,88	879,93	17 597,95

$$14477,88 + 15207,77 + 15961,86 = 45647,51$$

Le montant total remboursé au terme de la troisième échéance est de 45 647,51 €.

e.

$$\frac{1717,93}{18477,88} = 0,09297225 \approx 0,093$$

L'intérêt versé lors de la quatrième échéance est de 1 717,93 € ce qui représente 9,3% du montant de l'annuité.

Exercice 3.

Un emprunt consenti aux taux semestriel de 4,25% est amortissable au moyen de semestrialités constantes chacune de 2 620,92 €. Le dernier amortissement surpasse le premier de 2 018,15 €.

Calculez le nominal initial de l'emprunt.

Correction:

Commençons par déterminer le dernier amortissement ($amort_n$). On sait que pour celui-ci le capital restant du est égale à amortissement. La dernière semestrialité se décompose alors comme suit

$$semest = amort_n + amort_n \times i$$

$$2620,92 = amort_n + amort_n \times 0,0425$$

$$2620,92 = amort_n.(1 + 0,0425)$$

$$amort_n = \frac{2620,92}{1 + 0,0425} = 2514,07$$

Maintenant que nous avons notre dernier amortissement 2 514,07 €. Cherchons notre premier. On nous indique que l'$amort_n$ est plus grand que l'$amort_1$ de 2018,15 €.

$$amort_n = amort_1 + 2018,15$$

$$2514,07 = amort_1 + 2018,15$$

$$amort_1 = 2514,07 - 2018,15 = 495,92$$

Le premier amortissement (l'$amort_1$) est de 495,92 €. A partir de là, on peut utiliser la valeur de la semestrialité, l'amortissement et le taux d'intérêt pour en déduire le nominal de l'emprunt.

$$semest = amort + intrts$$

$$2620,92 = 495,92 + 0,0425.Nominal$$

$$495,92 = 2620,92 - 0,0425.Nominal$$

$$Nominal = \frac{2125}{0,0425} = 50000$$

Le nominal de l'emprunt est de 50 000 €.

Exercice 4.

La société Van Houtte a contracté le 15 septembre 2010 un emprunt de 10 Millions d'Euros amortissable sur 12 échéances constantes. Le taux est de 15%. La première échéance intervient le 15 septembre 2011. Immédiatement après l'échéance du 15 septembre 2015, la société envisage de rembourser par anticipation les annuités restant.

a. Calculez le montant de la somme dont la société a besoin pour effectuer ce remboursement.

Pour obtenir cette somme, elle contracte un emprunt le 16 septembre 2015. Le nominal de celui-ci est égal au montant précédent arrondi aux 100 000 supérieurs. Le taux est de 11%. La première annuité intervient le 15 septembre 2022. Les annuités sont constantes.

b. Appréciez le bien fondé de cette décision.

Correction:

a. Il s'agit ici de calculer la valeur actuelle des flux prévus par le contrat initial au bout de 5 ans et donc quand il reste 7 ans.

$$v_a = a.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Pour ce faire, il nous faut commencer par calculer l'annuité.

$$10000000 = a.\frac{1-(1+0,15)^{-12}}{0,15}$$

$$1000000 = a \times 5,420619$$

$$a = \frac{10000000}{5,420619} = 1844808$$

A partir de là, on peut calculer la valeur actuelle pour nos 7 dernières annuités.

$$v_a = 1844808.\frac{1-(1+0,15)^{-7}}{0,15}$$

$$v_a = 1844808 \times 4,16042 = 7675176$$

Le paiement à effectuer ici pour rembourser au bout de 5 annuité sera de 7 675 176 €.

b. Voyons si le nouveau crédit permet de payer des annuités plus faible sur le reste de période.

$$v_a = a.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$7675176 = a.\frac{1-(1+0,11)^{-7}}{0,11}$$

$$7675176 = 4,712196.a$$

$$a = \frac{7675176}{4,712196} = 1628790$$

La nouvelle annuité est de 1 628 790 € ce qui est plus petit que l'annuité initiale (1 844 808 €). L'opération est donc intéressante.