Mathématiques financières

TD 3 Les annuités (corrigé)

Exercice 1.

Une personne verse chaque année une même somme de 10 000 € à un fond d'investissements. Celui-ci lui garantie un taux d'intérêt de 3%. La date du premier versement a eu lieu le 1er décembre 2005 et le dernier en 2020.

Calculer le montant du capital constitué à la date du 1er décembre 2020.

Correction:

Chaque versement produit des intérêts qui se composent jusqu'à la fin du plan d'investissement. Celui-ci atteindra au terme de l'année n la valeur V_f définie comme:

$$V_f = a.(1+i)^n + a.(1+i)^{n-1} + ... + a.(1+i) + a$$

$$V_f = a.[1 + (1+i) + ... + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n]$$

On retrouve ici une suite géométrique de raison (1+i). Pour simplifier le raisonnement, posons q=(1+i).

$$V_f = a.[1 + q + ... + q^{n-1} + q^n]$$

On sait que la somme d'une suite géométrique de raison q est égale

$$\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Notre valeur finale se réécrit alors

$$Vf = a.\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

soit si on substitue sa valeur à q

$$Vf = a.\frac{1-(1+i)^{n+1}}{1-(1+i)}$$

$$Vf = a.\frac{1-(1+i)^{n+1}}{1-1-i}$$

$$Vf = a.\frac{1-(1+i)^{n+1}}{-i}$$

$$Vf = a.\frac{-1+(1+i)^{n+1}}{i}$$

$$Vf = a.\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}$$

$$V_f = 10000.\frac{(1+0,03)^{16}-1}{0,03} = 10000.\frac{0,6047064}{0,03} = 201568,80$$

Le capital constitué est au final de 201 568,80 €.

Exercice 2.

a. Une suite de 13 annuités constantes, capitalisées au taux de 3,5%, a une valeur acquise de 200 000 €. Calculez le montant de l'annuité.

b. Calculez la valeur acquise par 44 trimestrialités de chacune 10 000 € placés au taux de 2,5%.

Correction:

a.

$$200000 = a.\frac{(1+0,035)^{13}-1}{0,035}$$

$$200000 \times 0,035 = a.((1+0,035)^{13}-1)$$

$$a = \frac{200000 \times 0,035}{(1+0,035)^{13}-1}$$

$$a = \frac{7000}{0,563956} = 12412,32$$

b.

La capitalisation est trimestriel. Il faut pour en tenir compte transformer notre taux annuel en taux trimestriel.

$$(1+0.025)^{3/12}-1 = 0,006192246$$

$$v_f = 10000.\frac{(1+0,006192246)^{44}-1}{0,006192246}$$

$$v_f = 10000.\frac{0,3120866}{0,006192246} = 503995,90$$

Exercice 3

Un particulier désire financer l'achat de sa résidence principale par un crédit immobilier au taux de 2,8 % sur une durée de 20 ans. Le prêt est remboursé en mensualités constantes terme échu. En supposant que l'emprunteur a des capacités de remboursement de 2 000 € par mois et qu'il peut payer comptant 500 000 €, quel est le montant qu'il peut consacrer à l'achat de sa résidence ?

Correction:

Le montant qu'il peut consacrer à l'achat correspond à la somme de son apport et de sa capacité d'emprunt. Reste donc à déterminer cette capacité. Nous savons qu'elle correspond à la valeur actuelle d'une série de mensualité constante de 2000 € sur 20 ans soit 240 mois.

$$VA = a + \sum_{t=1}^{n} \frac{a}{(1+i)^t}$$

$$VA = a + \frac{a}{1+i} + \frac{a}{(1+i)^2} + ... + \frac{a}{(1+i)^n}$$

$$VA = a + a.(1+i)^{-1} + a.(1+i)^{-2} + ... + a.(1+i)^{-n}$$

$$VA = a.[1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + ... + (1+i)^{-n}]$$

On a a que multiplie une suite géométrique de raison $(1+i)^{-1}$. Posons $q = (1+i)^{-1}$. La s

$$\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$VA = a.\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$VA = a.\frac{1-[(1+i)^{-1}]^{n+1}}{1-(1+i)^{-1}}$$

$$VA = a.\frac{1-(1+i)^{-(n+1)}}{1-\frac{1}{1+i}}$$

$$VA = a.\frac{1-(1+i)^{-(n+1)}}{\frac{1+i}{1+i}-\frac{1}{1+i}}$$

$$VA = a.\frac{1-(1+i)^{-(n+1)}}{\frac{i}{1+i}}$$

$$VA = a.\frac{(1-(1+i)^{-(n+1)})(1+i)}{i}$$

$$VA = a.\frac{(1+i)-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$VA = a.\frac{1+i-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$VA = a.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Le taux est donné en base annuelle. Il est donc nécessaire pour notre rythme de composition mensuel de calculer le taux équivalent correspondant.

$$(1+0,028)^{\frac{1}{12}}-1=0,002304$$

Le taux équivalent mensuel est 0,2304%.

$$V_a = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$V_a = 2000\frac{1-(1+0,002304)^{-240}}{0,002304} = 368397,08$$

Maintenant que nous avant la capacité d'emprunt, on peut

$$500000+368397,08=868397,08$$

Le particulier peut emprunter 868 397, 08 €.

Exercice 4

Une personne désire emprunter 10 000 € à un établissement financier. Elle peut rembourser cet emprunt suivant plusieurs formules qui correspondent toutes au même taux d'intérêt :

Formule 1 : payer capital et intérêt en une seule fois au bout de 2 ans.

Formule 2 : payer en 24 mensualités constantes et ce dès la fin du premier mois après l'emprunt.

Formule 3 : ne rien payer pendant la première année, puis payer 12 mensualités égales à partir du 13ème mois de l'emprunt.

Questions :

A. Avec la formule 1, la personne doit payer 12 155,06 €. Quel est le taux annuel des intérêts si la capitalisation est annuelle ?

B. Si elle choisit la formule 2, combien devra-t-elle payer par mois (capitalisation mensuelle)?

C. Calculez le montant de chacune des mensualités de la formule 3 (capitalisation mensuelle)

Correction:

A. Le taux d'intérêt de la première formule est obtenu en résolvons l'équation suivante:

$$12155,06 = 10000(1+i)^2$$

$$\frac{12155,06}{10000} = (1+i)^2$$

$$(\frac{12155,06}{10000})^{1/2} = 1+i$$
$$i = 0,1025$$

Le taux ici est de 10,25%.

B. Pour déterminer combien il devait payer par mois dans la modalité de deux (capitalisation mensuel sur 24 mois). Commençons par déterminer le taux équivalent mensuel.

$$(1+0,1025)^{1/12} - 1 = 0,008165$$

On a la valeur actuelle de

$$10000 = a\frac{1-(1+0,008165)^{-24}}{0,008165}$$

$$a = \frac{10000 \times 0,008165}{1-(1+0,008165)^{-24}}$$

$$a = \frac{81,65}{1-0,8226995}$$

$$a = \frac{81,65}{1-0,8226995} = 460,5176 \approx 460,52$$

La mensualité serait de 460,52 €.

C. Commençons par calculer la valeur acquise de la somme au bout d'un an.

$$10000(1+0,008165)^{12} = 11025,02$$

C'est le points de départ de nos mensualités (12 mois).

$$11025,02 = a\frac{1-(1+0,008165)^{-12}}{0,008165}$$

$$a = \frac{11025,02 \times 0,008165}{1 - (1 + 0,008165)^{-12}}$$

$$a = 968,24$$

Les mensualités de la seconde année doit être de 968,24 €.