Mathématiques Financières

TD 1 Intérêts simples

Exercice 1.

Deux capitaux sont placés à intérêts simples à la même date selon les conditions suivantes :

- Placement 1 : 20 000 € à 9%.
- Placement 2 : 17 500 € à 11%.

Déterminez au bout de combien de temps ces deux placements auront acquis la même valeur.

Correction:

Il s'agit de déterminer la valeur de n, la durée de placement en années, qui permet d'égaliser la valeur acquise des deux placements.

$$20000.(1 + 0,09.n) = 17500.(1 + 0,11.n)$$

$$20000 + 1800.n = 17500 + 1925.n$$

$$20000 - 17500 = 1925.n - 1800.n$$

$$2500 = 125.n$$

$$n = \frac{2500}{125} = 20$$

Les deux placements auront atteint la même valeur au bout de 20 ans.

Exercice 2.

Un individu emprunte 4 000 € au taux d'intérêt simple de 4%. Cette somme est remboursée en deux versements égaux. Le premier versement intervient le 4ème mois tandis que le second intervient le 10ème mois.

A combien s'élève chaque versement ? A combien d'intérêts cela correspond t-il?

Correction:

La valeur actuelle d'un emprunt est égale à la somme des valeurs actuelles des flux de remboursements et des flux d'intérêts qui lui sont associés. Pour déterminer le montant des versements, nous allons nous baser sur cette propriété.

$$4000 = \frac{A}{1+0,04.\frac{4}{12}} + \frac{A}{1+0,04.\frac{10}{12}}$$

$$4000 = \frac{A}{1+\frac{16}{1200}} + \frac{A}{1+\frac{40}{1200}}$$

$$4000 = \frac{A}{\frac{1216}{1200}} + \frac{A}{\frac{1240}{1200}}$$

$$4000 = \frac{A}{\frac{76}{75}} + \frac{A}{\frac{31}{30}}$$

$$4000 = A \times (\frac{75}{76} + \frac{30}{31})$$

$$4000 = A \times (\frac{2325}{2356} + \frac{2280}{2356})$$

$$4000 = A \times \frac{4605}{2356}$$

$$A = 4000 \times \frac{2356}{4605}$$

$$A = 2046,47$$

La montant des versements aux mois 4 et 10 est de 2046,47 €.

A combien d'intérêts cela correspond t-il?

La montant remboursé est 4000 € (on ne rembourse que ce qu'on a emprunté). Le reste correspond donc aux intérêts.

$$2046,47 \times 2 - 4000 = 92,94$$

Le montant des intérêts versés ici est de 92,94 €.

Exercice 3.

Un capital placé une certaine durée à 8% a rapporté 500 € d'intérêts. Ce même capital placé 100 jours de moins à 9% aurait rapporté 480 € d'intérêts.

Quelle est la valeur de ce capital ? On suppose que j est "une certaine durée" en % d'année.

Correction:

Nous avons ici un système de deux équations avec deux inconnues (C, le montant placé et j le nombre de jours de placement). Chaque équation explique la formation de l'intérêt (simple) correspondant à chaque placement. On a :

$$\begin{cases} 500 = C.0,08.\frac{j}{360} \\ 480 = C.0,09.\frac{j-100}{360} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = \frac{500}{0,08.\frac{j}{360}} \\ C = \frac{480}{0,09.\frac{j-100}{360}} \end{cases}$$

On peut égaliser les deux expression de C pour déterminer j.

$$\frac{500}{0,08.\frac{j}{360}} = \frac{480}{0,09.\frac{j-100}{360}}$$

$$\frac{500}{\frac{0.08.j}{360}} = \frac{480}{\frac{0,09.(j-100)}{360}}$$

$$\frac{180000}{0,08.j} = \frac{172800}{0,09.(j-100)}$$

$$\frac{180000}{0,08.j} = \frac{172800}{0,09.j-9}$$

$$180000 \times (0,09.j - 9) = 172800 \times 0,08.j$$

$$16200.j - 1620000 = 13824.j$$

$$16200.j - 13824.j = 1620000$$

$$2376.j = 1620000$$

$$j = \frac{1620000}{2376} = 681,8182$$

La durée du premier placement est de 681 jours (681,8182). Maintenant que ne nous avons les durées de placement, nous pouvons déterminer le capital placé. Pour ce faire, reprenons l'équation 1.

$$500 = C \times 0,08 \times \frac{681,8182}{360}$$

$$C = 500 \times \frac{360}{0,08 \times 681,8182}$$

$$C = 3300$$

Le montant placé est de 3300 €.

Exercice 4.

Une banque vous propose deux types de placement pour une durée de six mois.

- Placement A : intérêts simples précomptés aux taux annuel de 6,95% .
- Placement B : intérêts simples post-comptés au taux annuel de 7%.

Quel placement choisissez-vous?

Correction:

Il s'agit ici d'exprimer les taux selon la même modalité de manière à pouvoir les comparer et donc d'exprimer le taux post-compté en taux précompté ou d'exprimer le taux précompté en taux post-compté.

Pour passer de l'un à l'autre, il suffit d'actualiser le taux à modifier par lui même.

Prenons le cas du passage du taux précompté au post-compté. Pour faciliter, le raisonnement, posons K le capital et I qui, dans le cas précompté, est retiré d'entrée au capital. On a:

$$(K-I)(1+tx_{post}.\frac{j}{360})=K$$

$$K+K.tx_{post}.\frac{j}{360}-I+I.tx_{post}.\frac{j}{360}=K$$

$$K-I+(K-I).tx_{post}.\frac{j}{360}-K=0$$

$$-I+(K-I).tx_{post}.\frac{j}{360}=0$$

$$(K-I).tx_{post}.\frac{j}{360}=I$$

$$tx_{post}=\frac{I}{(K-I)\frac{j}{360}}$$

Substituons à I sa valeur : $K.tx_{pr}.\frac{j}{360}$

$$tx_{post}=\frac{K.tx_{pr}.\frac{j}{360}}{(K-K.tx_{pr}.\frac{j}{360})\frac{j}{360}}$$

$$tx=\frac{K.\frac{j}{360}(tx_{pr})}{K.\frac{j}{360}(1-tx_{pr}.\frac{j}{360})}$$

$$tx_{post}=\frac{tx_{pr}}{1-tx_{pr}\frac{j}{360}}$$

Le même raisonnement peut être tenu pour le taux précompté. On a alors.

$$tx_{pr}=\frac{tx_{post}}{1+tx_{post}\frac{j}{360}}$$

Passons le post-compté en pré-compté.

$$tx_{pr}=\frac{0,07}{1+0,07.\frac{6}{12}}=0,0676$$

Le taux équivalent précompté du placement B (6,76%) et inférieur au taux précompté du placement A (6,95%).

La placement A est donc plus intéressant que le placement B. Le même résultat peut être retrouvé sur la base du taux équivalent post-compté.

Exercice 5.

L'achat d'une appareil électroménager peut être réglé de la façon suivante:

Modalité 1: règlement du prix comptant 9420 €

Modalité 2: versement de 3000 € le jour de l'achat et acceptation de 12 traites mensuelles de 600 € chacune, la première arrive à échéance le mois après l'achat.

A. En décrivant l'équivalence des deux modalités de règlement le jour de l'achat, calculez le taux de crédit accordé à l'acheteur.

B. L'acheteur propose de verser 3000 € le jour de l'achat et de remplacer les 12 traites mensuelles par un règlement unique de 7200 €. Calculez aux mêmes conditions l'époque à laquelle il doit effectuer son règlement.

Correction:

A. Pour déterminer le taux de crédit implicite de la modalité 2, nous partons du fait que cette dernière doit être équivalente à la première. Autrement-dit, les valeurs actuelles des deux modalités sont les mêmes. Cela nous amène à considérer la valeur actuelle des traites. Celle-ci se déterminer selon le schéma suivant:

$$V_a = M_{traite} - escompte = M_{traite} - M_{traite} \times tx \times n$$

On a alors:

$$9420 = 3000 + \sum_{i=1}^{12}(600 - 600.tx.\frac{i}{12})$$

$$9420 - 3000 = \sum_{i=1}^{12}(600 - 600.tx.\frac{i}{12})$$

$$6420 = 12 \times 600 - \sum_{i=1}^{12} 600.tx.\frac{i}{12}$$

$$6420 = 7200 - \sum_{i=1}^{12} 600.tx.\frac{i}{12}$$

$$6420 = 7200 - [600.tx.\frac{1}{12} + 600.tx.\frac{2}{12} + ... + 600.tx.\frac{12}{12}]$$

$$6420 = 7200 - 600.tx.(1/12 + 2/12 + ... + 12/12)$$

Dans la parenthèse, nous avons la somme d'une suite arithmétique de raison 1/12. On peut directement déterminer sa valeur. Rappelons le somme d'une suite arithmétique S_a de raison 1 allant x_1 à x_n est égale à :

$$S_a = n.\frac{1+n}{2}$$

$$6420 = 7200 - 600.tx.\frac{1}{12}(1 + 2 + ... + 12)$$

$$6420 = 7200 - 600.tx.\frac{1}{12}.12.\frac{1+12}{2}$$

$$6420 = 7200 - 600.tx.\frac{1+12}{2}$$

$$6420 = 7200 - (600 \times 6.5).tx$$

$$7200 - 6420 = 3900.tx$$

$$tx = \frac{780}{3900} = 0.2$$

Le taux d'intérêt facturé sur la seconde modalité de paiement est de 20%.

B. Il s'agit ici de déterminer la date

$$9420 = 3000 + 7200 - 7200 \times 0.2 \times \frac{m}{12}$$

$$9420 = 10200 - 1440.\frac{m}{12}$$

$$9420 - 10200 = -1440.\frac{m}{12}$$

$$-780 = -120.m$$

$$m = \frac{-780}{-120} = 6,5$$

La traite de 7200 € doit intervenir au bout de 6,5 mois pour que l'ensemble soit équivalent.